<u>Unidad II</u>

Conjuntos

2.1 Características de los conjuntos.

Es la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados en el la mente o en la intuición, por lo tanto, estos objetos son bien determinados y diferenciados.

Es la reunión, agrupación o colección de elementos bien definidos que tienen una propiedad en común, este fue inventado por

Georg Cantor hace 100 años. Sus conceptos han penetrado y transformado todas las teorías formales y todas las ramas de la matemática y de la lógica.

Como este es un concepto primario, el conjunto no puede definirse; sólo se puede dar una idea intuitiva de el.

A pesar de su sencillez este concepto es la base de las Matemáticas actuales, ya que, entre otras cosas, sirve para la construcción de los números. Sirve además para estudiar las estructuras algebraicas, con las cuales se organizan ordenadamente todos los conocimientos matemáticos.

Ejemplos: los alumnos de un colegio, los números impares, los meses del año, etc., siendo cada alumno del colegio, cada número impar, cada mes del año, respectivamente, elementos de cada uno de los correspondientes conjuntos.

Un conjunto puede determinarse de dos formas:

- ***Por extensión:*** escribiendo dentro de una llave los nombres de los elementos del conjunto.

- ***Por comprensión:*** escribiendo dentro de una llave una propiedad característica de los elementos del conjunto y solamente de ellos.

Ejemplo: El conjunto de los meses del año se nombra:

Por extensión: {Enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}

Por comprensión: {meses del año}, o bien, de esta otra forma: {x/x es un mes del año}, que se lee: conjunto de elementos x tales que x es un mes del año.

Ejemplo: El conjunto dedos de la mano se nombra

Por extensión: {Pulgar, Indice, Mayor, Anular, meñique}

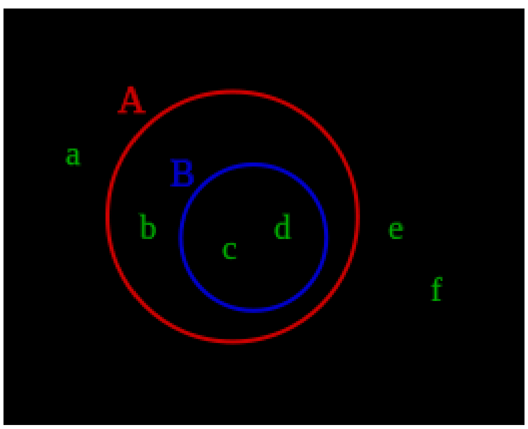
Por comprensión: {dedos de la mano}, o bien, de esta otra forma: {x/x es dedo de la mano}, que se lee: conjunto de elementos x tales que x es un dedo de la mano

2.1.1 Conjunto universo, vacío

Cuando se está trabajando con conjuntos, los elementos se encuentran en un conjunto "de orden superior", es decir, si hablamos del conjunto de las letras de una palabra, se sobreentiende que dichas letras son las del abecedario, si hablamos de los divisores de un número, pensamos inmediatamente en números naturales o en números enteros. Por tanto siempre que tratamos con conjuntos, implícitamente hacemos referencia a un conjunto que contiene a todos los elementos con los que estamos trabajando. A ese conjunto lo llamaremos **conjunto universal.**

Para evitar ambigüedades, en cada ejercicio que realicemos, siempre que sea necesario, indicaremos cuál es el conjunto universal.

El conjunto universal se suele representar por la letra U o bien por Ω.



descripcion. Siendo U el conjunto universo y A, B subconjuntos.

$$U = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$A = \{b, c, d\}$$
$$B = \{c, d\}$$

Conjunto Vacio
conjunto vacío es el conjunto que no contiene ningún elemento. Puesto que lo único que define a un conjunto son sus elementos, el conjunto vacío es único.El conjunto vacío es denotado por los símbolos:

$$\varnothing \text{ ó } \emptyset$$
$$\{\}$$

El conjunto vacio tiene las siguientes propiedades:

- El conjunto vacío es único: dado dos conjuntos sin elementos, ambos son iguales. (Esto justifica hablar de "el conjunt
- El único subconjunto del conjunto vacío es él mismo:

  $$A \subseteq \varnothing \quad \text{solo si} \quad A = \varnothing$$

- El número de elementos del conjunto vacío (es decir, su número cardinal) es cero; en particular, el conjunto vacío es

  $$|\varnothing| = 0$$

El conjunto vacio actua como cero en las operaciones de algebra de conjuntos.

- Para todo conjunto A, el conjunto vacío es subconjunto de A:

  $$\varnothing \subseteq A$$

- Para todo conjunto A, la unión de A con el conjunto vacío es A:

  $$A \cup \varnothing = A$$

- Para todo conjunto A, la intersección de A con el conjunto vacío resulta en el conjunto vacío:

  $$A \cap \varnothing = \varnothing$$

- Para todo conjunto A, el producto cartesiano de A y el conjunto vacío es vacío:

  $$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$$

2.1.2 Números naturales, enteros, racionales, reales e imaginarios

Los **números naturales** (o **que contamos**) son 1, 2, 3, 4, 5, etc. Hay infinitamente muchos números naturales. Elconjunto de números naturales es algunas veces escrito como **N** como abreviatura.

Los **números enteros** son los números naturales junto con el 0.

Algunos libros no están de acuerdo y dicen que los números naturales incluyen el 0.

La suma de cualesquiera dos números naturales es también un número natural (por ejemplo, 4 + 2000 = 2004), y el producto de cualesquiera dos números naturales es un número natural (4 × 2000 = 8000). Aunque esto no es verdadero para la resta y la división.

Los enteros

Los **enteros** son el conjunto de números reales que consiste de los números naturales, sus inversos aditivos y cero. El conjunto de enteros es algunas veces escrito como **J** o **Z** como abreviatura. La suma, producto, y diferencia de cualesquiera dos enteros también es un entero.

Pero esto no es verdadero para la división... solo intente 1 ÷ 2.

Los números racionales

Los **números racionales** son aquellos números que pueden ser expresados como una relación entre dos enteros. Por ejemplo, las fracciones 1/3 y –1111/8 ambas son números racionales. Todos los enteros están incluídos en los números racionales, ya que cualquier entero *z* puede ser escrito como la relación *z*/1.

Todos los decimales que terminan son números racionales (ya que 8.27 puede ser escrito como 827/100.) Los decimales que tienen un patrón repetitivo después de algún punto también son racionales: por ejemplo,

0.083333333... = 1/12.

El conjunto de números racionales es cerrado bajo las 4 operaciones básicas, esto es, dados cualesquiera dos números racionales, su suma, diferencia, producto, y cociente también es un número racional (siempre que no dividamos entre 0.)

Los números irracionales

Un **número irracional** es un número que no puede ser escrito como una relación (o fracción). En forma decimal, nunca termina o se repite. Los antiguos griegos descubrieron que no todos los números son racionales; hay ecuaciones que no pueden ser resueltas usando relaciones de enteros.

La primera ecuación a ser estudiada fue $2 = x^2$. Qué número por sí mismo es igual a 2?

La $\sqrt{2}$ es alrededor de 1.414, porque $1.414^2 = 1.999396$, que está cerca de 2. Pero Usted nunca lo hallará elevando al cuadrado una fracción (o decimal terminante). La raíz cuadrada de 2 es un número irracional, que significa que su decimal equivalente continua por siempre, con ningún patrón repetitivo:

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309...$$

Nota histórica:

De acuerdo a la leyenda, los antiguos matemáticos griegos que probaron que $\sqrt{2}$ NO podría ser escrito como una relación de enteros*p*/*q* hicieron enojar tanto a sus colegas, que los pusieron en un barco y los ahogaron!

Otros números irracionales famosos son **la Relación Dorada**, un número con gran importancia en la biología:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.61803398874989...$$

π (pi), la relación de la circunferencia de un círculo a su diámetro:

$\pi = 3.14159265358979...$

y e, el número más importante en calculo:

$e = 2.71828182845904...$

Los números irracionales pueden ser subdivididos aún más en números **algebraicos**, que son las soluciones de alguna ecuación polinomial (como la $\sqrt{2}$ y la Relación Dorada), y los números **transcendentales**, que no son las soluciones de cualquier ecuación polinomial. *π* y *e* ambos son transcendentales.

Los números reales

Los números reales es el conjunto de números que consiste de todos los números racionales y de todos los números irracionales. Los números reales son "todos los números" en la recta numérica. Hay infinitamente muchos números reales así como hay infinitamente muchos números en cada uno de los otros conjuntos de números. Pero, puede probarse que el infinito de los números reales es un infinito **muy grande**.

El "más pequeño", o infinito **contable** de los enteros y racionales es algunas veces llamado $\aleph_0$ (alef-naught), y el infinito**incontable** de los reales es llamado $\aleph_1$ (alef-one).

Hay incluso infinitos "más grandes", pero debe tomar una clase de teoría de conjuntos para eso!

Los números complejos

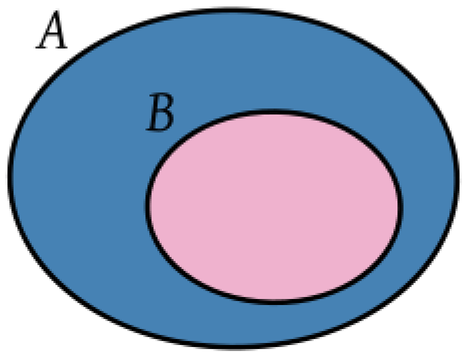
Los números complejos son el conjunto {*a* + *bi* **|** *a* y *b* son números reales}, donde *i* es la unidad imaginaria, –1. (Presione aquí para más información de números imaginarios y de operaciones con números complejos).

Los números complejos incluyen el conjunto de los números reales. Los números reales, en el sistema complejo, son escritos en la forma $a + 0i = a$, un número real.

Este conjunto es algunas veces escrito como **C** como abreviatura. El conjunto de los números complejos es importante porque para cualquier polinomio $p(x)$ con coeficientes de números reales, todas las soluciones de $p(x) = 0$ estarán en**C**.

2.1.3 Subconjuntos

Conjunto que forma parte de otro conjunto dado.Por ejemplo, el conjunto de los números c, {1, 2, 3, 4, ...}, es un subconjunto de los enteros I, {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}, y se escribe como c I.



2.1.4 Conjunto potencia

Un conjunto potencia es el conjunto de *todos los subconjuntos de un conjunto*.
Ejemplo:

Si tenemos un conjunto {a,b,c}:

- Un subconjunto suyo podría ser {a}, o {b}, o {a,c}, o los demás
- Y {a,b,c} también es un subconjunto de {a,b,c} *(sí, es verdad, pero no es un "subconjunto propio")*
- Y el conjunto vacío {} también es un subconjunto de {a,b,c}

De hecho, si haces una lista de todos los subconjuntos de S={a,b,c} tendrás el **conjunto potencia** de {a,b,c}:

P(S) = { {}, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} }

Piensa en que estas son las diferentes maneras de elegir los elementos (el orden no importa), incluido tomarlos todos o ninguno.

Si el conjunto original tiene n elementos, el conjunto potencia tendrá 2^n elementos

Ejemplo: en el ejemplo {a,b,c} de arriba hay tres elementos (**a**,**b** y **c**, claro).

Así que el conjunto potencia tendrá 2^3 = 8, ¡y así es!

El número de elementos de un conjunto se suele escribir |S|, así que ahora escribimos:

|P(S)| = 2^n

Ejemplo: ¿cuántos elementos tiene el conjunto potencia de S={1,2,3,4,5}?

Bien, S tiene 5 elementos, así que:

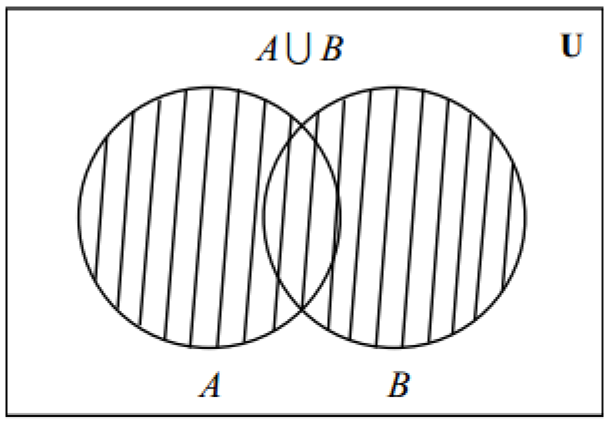
$$|P(S)| = 2^n = 2^5 = 32$$

2.2 Operaciones con conjuntos (Unión, Intersección, Complemento, Diferencia y diferencia simétrica)

Union

La unión de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos de A con todos los elementos de B sin repetir ninguno y se denota como $A \cup B$. Esto es:

$$A \bigcup B = \{ x \mid x \in A \quad o \quad x \in B \}$$



Ejemplo.

$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

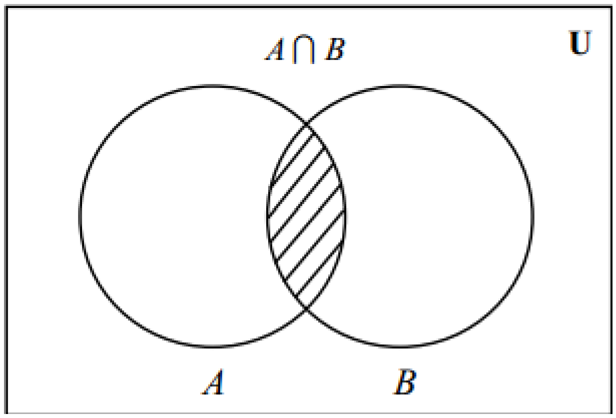
$B = \{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano\}$

$A \bigcup B = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía, durazno, melón, plátano\}$

Interseccion

La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos de A que también pertenecen a B y se denota como $A \cap B$. Esto es:

$$A \bigcap B = \{ x \mid x \in A \quad y \quad x \in B \}$$



Ejemplo.

$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

$B = \{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano\}$

$A \cap B = \{uva, naranja, sandía\}$

Dos conjuntos son ajenos o disjuntos cuando su intersección es el conjunto vacío, es decir, que no tienen nada en común. Por ejemplo:

$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

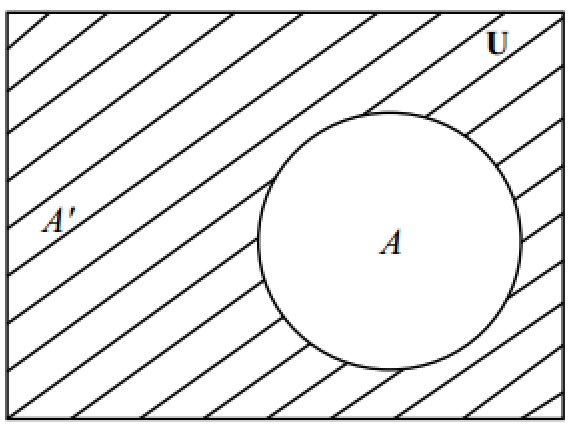
$E = \{limón, fresa, pera, mandarina, cereza\}$

$A \cap E = \phi$

Complemento

El complemento del conjunto A con respecto al conjunto universal U es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A y se denota como 'A . Esto es:

$$A' = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$



Ejemplo.

$U = \{mango, kiwi, ciruela, uva, pera, naranja, cereza, manzana, sandía, durazno, limón, melón, plátano\}$

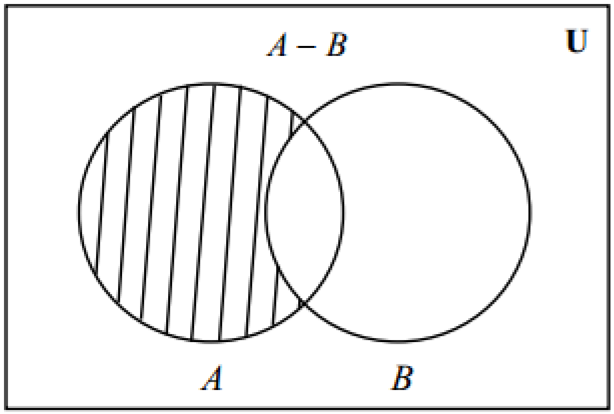
$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

$A' = \{kiwi, pera, cereza, durazno, limón, melón, plátano\}$

Diferencia

La diferencia de los conjuntos A y B (en ese orden) es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B y se denota como $A-B$. Esto es:

$$A-B=\{\, x \mid x\in A \quad y \quad x\notin B \,\}$$



2.3 Propiedades de los conjuntos.

Sean los conjuntos ,A ,B C dentro del universo U . Las seis propiedades que rigen las operaciones con esos conjuntos son las siguientes:

1. Propiedades de identidad:

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cap U = A$$
$$A \cap \phi = \phi$$

2. Propiedades de idempotencia:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

3. Propiedades de complemento:

$$A \cup A' = U$$
$$A \cap A' = \phi$$

4. Propiedades asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

5. Propiedades conmutativas

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

6. Propiedades distributivas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2.4 Aplicaciones de conjuntos

Una aplicacion´ de X en Y , es unacorrespondencia de X en Y tal que cada elemento de x ∈ X tiene una unica imagen en Y , denotada por ´ f(x) ∈ Y.

♣ Definicion: ´ Sea f : X −→ Y una aplicacion´

• Dado A ⊆ X se llama imagen de A, y se denota f(A),

al conjunto de todos los elemetos de Y de la forma

$f(a)$, siendo $a \in A$:

$f(A) = \{f(a) \in Y \ / \ a \in A \}$.

• Se llama imagen de la aplicacion´ f, y se denota Im f,

al conjunto:

$\text{Im } f = f(X) = \{f(x) \in Y \ / \ x \in X \}$.

• $\text{Im } f \subseteq Y$ y si $A \subseteq X \Longrightarrow f(A) \subseteq \text{Im } f$